# Is wiskunde universeel?

**door Jan De Beule en Andreas Debrouwere**

Wiskundige resultaten worden vaak beschouwd als universele waarheden. In dit essay proberen we duidelijk te maken dat deze these subtieler is dan dat ze op het eerste gezicht lijkt. Vooreerst maken we het onderscheid tussen de *wiskundige methode* en *wiskundige waarheden,* ook wel *stellingen* genoemd. De wiskundige methode kan men kort omschrijven als een spel waarin dezelfde spelregels steeds dezelfde waarheden opleveren. Meer bepaald maken wiskundigen gebruik van axioma's en logisch redeneren om stellingen te bewijzen. Dit lijkt de wiskundige methode universeel te maken. Daarentegen worden stellingen soms gecontesteerd, dit lijkt ze niet universeel te maken.
In dit essay gaan we dieper in op de wiskundige methode en wiskundige stellingen. We motiveren waarom men de wiskundige methode als universeel kan beschouwen, en dat deze universaliteit niet in tegenspraak is met de paradoxale stellingen die ze soms oplevert. Om dit te duiden, bespreken we het *keuze-axioma* en de *Banach-Tarksi paradox*.
Het ogenschijnlijk onschuldige keuze-axioma, dat begin vorige eeuw werd ingevoerd, is enerzijds noodzakelijk voor heel wat fundamentele resultaten binnen de moderne wiskunde, maar leidt anderzijds ook tot enkele erg contra-intuïtieve stellingen, waaronder de Banach-Tarksi paradox.

# De wiskundige methode

Een wiskundige theorie is in essentie gebaseerd op *objecten* en *axioma's*. De objecten zijn wiskundige basisconcepten waarover men in de theorie wenst te redeneren. Bijvoorbeeld, in een theorie over vlakke meetkunde zijn de objecten punten en rechten. De axioma's zijn beweringen over deze objecten die men zonder meer als waar aanneemt. Vervolgens voeren wiskundigen via de basisobjecten voor hen interessante en complexere structuren in. Ze proberen deze structuren dan beter te begrijpen door er allerlei beweringen over aan te tonen. Deze beweringen noemt men *wiskundige stellingen.* In de vlakke Euclidische meetkunde voert men bijvoorbeeld driehoeken en cirkels in en worden deze structuren bestudeerd. Voor het bewijzen van wiskundige stellingen vertrekt men vanuit de axioma's en maakt men gebruik van logische deductieregels. Het proces van logische deductie van stellingen op basis van axioma's noemt men de *wiskundige methode*[1]. Deze methode werd voor het eerst gebruikt door Euclides van Alexandrië (300.v.Chr) om op systematische wijze de vlakke meetkunde te bestuderen. Dit was een ware revolutie binnen de wiskunde!

De keuze van axioma's in een wiskundige theorie is veelal gemotiveerd door observaties in de wereld om ons heen. Zo is een van de axioma's in Euclides' theorie van vlakke meetkunde dat er door elke twee punten een rechte gaat. Dit lijkt evident waar te zijn in de wereld waarin we leven. Vanuit zuiver wiskundig perspectief, is men weliswaar volledig vrij in het bepalen welke beweringen axioma's zijn. De keuze van axioma's is dus arbitrair. We komen hierop terug in de volgende paragraaf. De keuze van axioma's staat echter volledig los van de wiskundige methode, die enkel slaat op het correct bewijzen van stellingen binnen een wiskundige theorie waarin de axioma's reeds zijn vastgelegd. Met andere woorden, een correct bewezen stelling is waar binnen een gegeven theorie. Dit lijkt de wiskundige methode objectief en universeel te maken.

Hierdoor zou men kunnen denken dat de wiskundige methode een eerder saai deductief proces is waar niet veel over te zeggen valt. Dit is allesbehalve waar! In de wiskundige logica, een tak van de wiskunde die men kan beschouwen als de 'wiskunde van de wiskunde', bestudeert men op abstracte wijze wiskundige theorieën. Een van de meest verrassende resultaten in dit veld – en bij uitbreiding in de hele wiskunde – is de onvolledigheidsstelling[2] van Kurt Gödel (1906-1978). Deze stelling zegt dat er binnen eender welke redelijke theorie een bewering bestaat waarvan men niet kan bewijzen dat ze waar of vals is. Anders gezegd, de wiskundige methode is niet toereikend om voor elke bewering te beslissen of ze waar of vals is.

# Wiskundige paradoxen?

Zoals beargumenteerd in de vorige paragraaf, zijn correct bewezen stellingen waar binnen een gegeven theorie. Binnenin de theorie is er bijgevolg geen mogelijkheid tot discussie omtrent de waarheid van stellingen. De wiskundige is echter in staat om zich buiten de theorie te verplaatsen, en als het ware vanop afstand te oordelen over de theorie en haar stellingen. Vanuit dit perspectief kan men wel bepalen of men al dan niet akkoord gaat met een stelling. Dit op basis van een persoonlijke filosofische visie op wiskunde. Hieruit lijkt te volgen dat wiskundige waarheden subjectief en dus niet universeel zijn. Het niet aanvaarden van een stelling betekent evenwel geenszins dat de methode waarmee deze stelling bewezen is in twijfel getrokken wordt.

Stellingen die erg indruisen tegen onze menselijke wiskundige intuïtie worden soms *wiskundige paradoxen* genoemd – ook al zijn ze waar! Zoals alle stellingen, zijn wiskundige paradoxen een onbetwistbaar gevolg van de axioma's van de theorie waarin men werkt. Een wiskundige paradox leidt daarom tot de volgende prangende keuze: ofwel aanvaardt men – misschien met enige tegenzin – toch de wiskundige paradox, ofwel herziet men de axioma's van de theorie.

# Het keuze-axioma en de Banach-Tarski paradox

Het keuze-axioma[3] stelt dat er voor elke klasse van niet-lege verzamelingen een *systematische procedure* bestaat om uit elke verzameling een element te selecteren. Op het eerste zicht lijkt het keuze-axioma triviaal waar, de verzamelingen zijn immers niet-ledig. Essentieel in het axioma is echter het bestaan van een systematische procedure. Deze kan men interpreteren als een handleiding: iedereen die deze handleiding volgt zal tot dezelfde selectie van elementen komen. Het volgend voorbeeld[4], in wezen bedacht door de filosoof Bertrand Russell (1872-1970), maakt duidelijk wanneer het keuze-axioma al dan niet nodig is. Stel dat je beschikt over een (mogelijks oneindig) aantal kasten, met in elke kast twee ballen, een blauwe en een oranje. Een procedure om uit elke kast een bal te nemen is dan bijvoorbeeld 'selecteer de blauwe bal'. Het keuze-axioma is in dit geval dus niet nodig. Als in elke kast echter twee blauwe ballen zitten, is het niet mogelijk om een expliciete procedure te beschrijven. Het keuze-axioma garandeert dat er wel degelijk een bestaat! Het keuze- axioma werd in 1904 ingevoerd door Ernst Zermelo (1871-1953) en bleek al snel een erg krachtig instrument om wiskundige stellingen te bewijzen. Het stelde wiskundigen in staat om het bestaan van een bepaalde structuur aan te tonen, zonder er een expliciet voorbeeld van te moeten geven. Dit noemt men in de wiskunde een *niet-constructief* bewijs. Het keuze-axioma leidde tot stellingen die onontbeerlijk zijn in de moderne wiskunde, maar ook tot enkele stellingen die indruisen tegen onze menselijke intuïtie. Een van de meeste gecontesteerde paradoxen in de wiskunde is de *Banach-Tarski paradox*[5], genoemd naar zijn uitvinders Stefan Banach (1892-1945) en Alfred Tarski (1901-1983).

Deze paradox stelt dat men een bol in vijf niet-overlappende stukken kan verdelen die men, enkel door middel van translaties en rotaties, kan samenstellen tot twee bollen die elk hetzelfde volume hebben als de oorspronkelijke bol. Dit lijkt volstrekt onmogelijk volgens onze meetkundige intuïtie, toch is het een wiskundige waarheid als een ander eenmaal men het keuze-axioma aanneemt. Het bestaan van de vijf stukken van een bol in de Banach-Tarski paradox wordt bewezen met behulp van het keuze-axioma, men hoeft ze dus niet expliciet te construeren. Meer zelfs, wiskundigen hebben aangetoond dat het in zekere zin onmogelijk is om een expliciete constructie te geven van deze stukken.

Interessant is om op te merken dat een variant van de Banach-Tarski paradox wel strookt met onze intuïtie. Vervang hiervoor de bol door de verzameling van natuurlijke getallen. Deze verzameling kan opgedeeld worden in twee verzamelingen die elk even groot zijn als de natuurlijke getallen, namelijk de verzameling van even getallen en de verzameling van oneven getallen. De reden dat we op het eerste gezicht dit resultaat niet en de Banach-Tarski paradox wel als paradoxaal ervaren ligt misschien in het feit dat de verzameling van natuurlijke getallen oneindig is terwijl we over de bol denken als een eindig object.

Het keuze-axioma zorgde initieel voor heel wat ophef binnen de wiskundige wereld. Voor sommige wiskundigen ging het een brug te ver om een axioma aan te nemen dat het mogelijk maakt om het bestaan van zaken aan te tonen zonder ze effectief te construeren. Een ander argument tegen het keuze-axioma is het feit dat het contra-intuïtieve stellingen, zoals de Banach-Tarski paradox, met zich meebrengt. Mettertijd heeft het overgrote deel van de wiskundigen het keuze-axioma echter aanvaard. De reden hiervoor is dat het aan de basis ligt van vele fundamentele resultaten binnen de moderne wiskunde. Men accepteert het keuze-axioma dus omdat het een noodzakelijkheid blijkt om aan meer gevorderde wiskunde te doen, de paradoxen neemt men er voor lief bij. Toch blijft het keuze-axioma een heikel punt. Zo gebeurt er tot op de dag vandaag onderzoek naar de vraag of het mogelijk is om stellingen te bewijzen zonder gebruik te maken van het keuze-axioma, of met behulp van een afgezwakte versie ervan[6].

# Samenvattende conclusie

Wiskundige stellingen zijn waarheden binnen een gegeven theorie, verkregen via een universele werkwijze. Als mens zijn we echter ook in staat om vanop afstand op subjectieve wijze te oordelen over deze stellingen; dit lijkt het concept wiskundige waarheid niet universeel te maken. Vanuit dit perspectief worden sommige wiskundige waarheden dan als paradoxen geoormerkt.

---

1 Peter J. Cameron, *Sets, Logistics and Categories* (Londen: Springer, 1998), hoofdstukken 3 en 4.

2 Ibid., 106, Theorem 5.8.

3 Ibid., 11, 114.

4 Ibid., 31.

5 Gregor Tomkowicz, Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox* (Cambridge: Cambridge University Press, 2016), hoofdstuk 3.

6 Ibid., hoofdstuk 15.